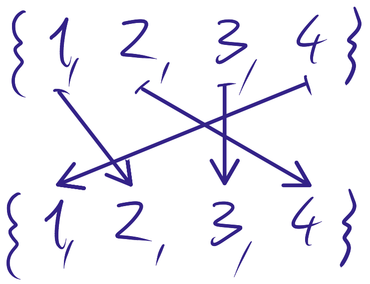
Die symmetrischen Gruppen

2.26 Def: Eine n-stellige Permutation ist eine bijektive Abbildung

$$\sigma : \{1,2,\dots,n\} \xrightarrow{\cong} \{1,2,\dots,n\}$$

Notation:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Bsp:



$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2.27 Def: Die symmetrische Gruppe vom Grad n, S_n, ist die Menge aller n-stelligen Permutationen mit der Komposition von Abbildungen $\circ$ als Verknüpfung.

2.28 Notiz: $(S_n, \circ)$ ist eine Gruppe

- wohldefiniert: Komposition zweier bijektiver Abb. ist bijektiv [...].
- assoziativ: Satz 1.19

neutrales Element: $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$

σ^{-1}: Umkehrabbildung von σ

Beispiele:

$$S_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathrm{id}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\tau} \right\}$$

$$\tau^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{tikzcd} \{1, & 2\} \\ \{1, \arrow[from=1-2, dl] \arrow[from=1-1, dr] & 2\} \\ \{1, \arrow[from=2-2, dl] \arrow[from=2-1, dr] & 2\} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \{1, \arrow[d] & 2\} \arrow[d] \\ \{1, & 2\} \end{tikzcd} = \mathrm{id}$$

$$(S_2, \circ) \cong (\{\pm 1\}, \cdot)$$

$$\mathrm{id} \longmapsto +1$$

$$\tau \longmapsto -1$$

$$S_3 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathrm{id}}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{tikzcd} \{1, \arrow[dr] & 2, \arrow[dr] & 3\} \arrow[dll] \\ \{1, \arrow[dr] & 2, \arrow[dl] & 3\} \arrow[d] \\ \{1, & 2, & 3\} \end{tikzcd} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{tikzcd} \{1, \arrow[dr] & 2, \arrow[dl] & 3\} \arrow[d] \\ \{1, \arrow[dr] & 2, \arrow[dr] & 3\} \arrow[dll] \\ \{1, & 2, & 3\} \end{tikzcd} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

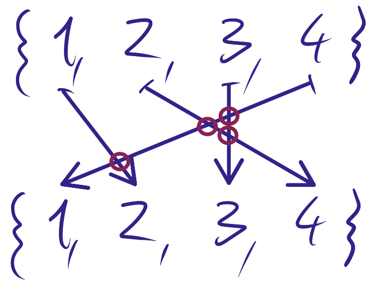
$\longrightarrow$ S_3 ist nicht abelsch!

2.29 Def: Ein **Fehlstand** einer n-stelligen Permutation σ ist eine zwei-elementige Teilmenge $\{i,k\} \subseteq \{1,\dots,n\}$ mit $i<k$ und $\sigma(i) > \sigma(k)$.

Das **Signum** von σ ist

$$\operatorname{sgn}(\sigma) := (-1)^{|\{\text{Fehlstände von } \sigma\}|} \in \{\pm 1\}$$

Beispiel: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$



hat 4 Fehlstände

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^4 = 1.$$

2.30 Satz: Das Signum ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\operatorname{sgn}: (S_n, \circ) \longrightarrow (\{\pm 1\}, \cdot)$$

Beweis:
Sei $F(\sigma) \in \mathbb{Z}$ Anzahl der Fehlstände.
sgn ist die Komposition

$$\underbrace{(S_n,\circ) \longrightarrow \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+\right)}_{\text{}} \xrightarrow{\cong} (\{\pm 1\},\cdot)$$

$$\sigma \longmapsto [F(\sigma)],\quad [z] \longmapsto (-1)^z$$

Reicht zu zeigen: Diese Abbildung ist ein Homomorphismus, also

$$[F(\tau\circ\sigma)] = [F(\tau)] + [F(\sigma)] \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Für eine zweielementige Menge $\{i,k\}$ sind folgende 4 Fälle zu unterscheiden:

①
$$\begin{tikzcd}
i \arrow[d] & k \arrow[d] \\
\sigma(i) \arrow[d] & \sigma(k) \arrow[d] \\
\tau\sigma(i) & \tau\sigma(k)
\end{tikzcd}$$

②
$$\begin{tikzcd}
i \arrow[dr] & k \arrow[dl] \\
\sigma(k) \arrow[d] & \sigma(i) \arrow[d] \\
\tau\sigma(k) & \tau\sigma(i)
\end{tikzcd}$$

③
$$\begin{tikzcd}
i \arrow[d] & k \arrow[d] \\
\sigma(i) \arrow[dr] & \sigma(k) \arrow[dl] \\
\tau\sigma(k) & \tau\sigma(i)
\end{tikzcd}$$

④
$$\begin{tikzcd}
i \arrow[dr] & k \arrow[dl] \\
\sigma(k) \arrow[dr] & \sigma(i) \arrow[dl] \\
\tau\sigma(i) & \tau\sigma(k)
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
i \arrow[dd] & k \arrow[dd] \\
 & \\
\tau\sigma(i) & \tau\sigma(k)
\end{tikzcd}$$

Fall	Beitrag zu $[F(\tau)]$	Beitrag zu $[F(\sigma)]$	Beitrag zu $[F(\tau\circ\sigma)]$
①	$[0]$	$[0]$	$[0]$
②	$[0]$	$[1]$	$[1]$
③	$[1]$	$[0]$	$[1]$
④	$[1]$	$[1]$	$[2]=[0]$

In jedem Fall gilt:

$$\underset{\text{zu } [F(\tau)]}{\text{Beitrag}} + \underset{\text{zu } [F(\sigma)]}{\text{Beitrag}} = \underset{\text{zu } [F(\tau \circ \sigma)]}{\text{Beitrag}} \text{ in } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Indem wir über alle $\{i,k\}$ summieren erhalten wir also

$$[F(\tau)] + [F(\sigma)] = [F(\tau \circ \sigma)]$$

$\square$

Wie berechnet man $\operatorname{sgn}(\sigma)$?

(a) mit Definition (Fehlstände/Kreuzungen zählen)

(b) mit Satz 2.30 & Zerlegung in Transpositionen

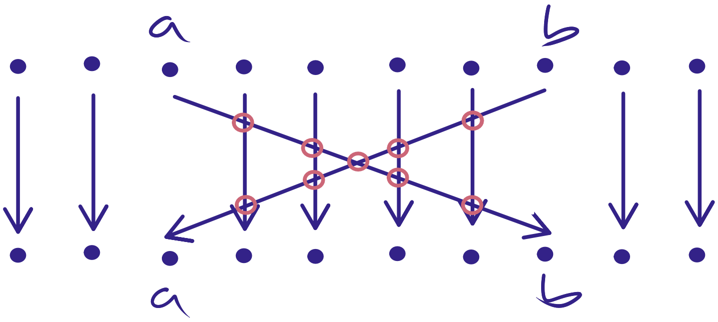
<u>Transposition</u> := Permutation der Form

$$(a\ b) := \begin{cases} a \mapsto b \\ b \mapsto a \\ x \mapsto x \quad \text{für } x \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a, b\} \end{cases}$$

Jede Permutation lässt sich (auf viele verschiedene Weisen) zerlegen in eine Komposition von Transpositionen.

Es ist stets

$$\operatorname{sgn}(a\ b) = -1$$



Für $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_m$

Transpositionen

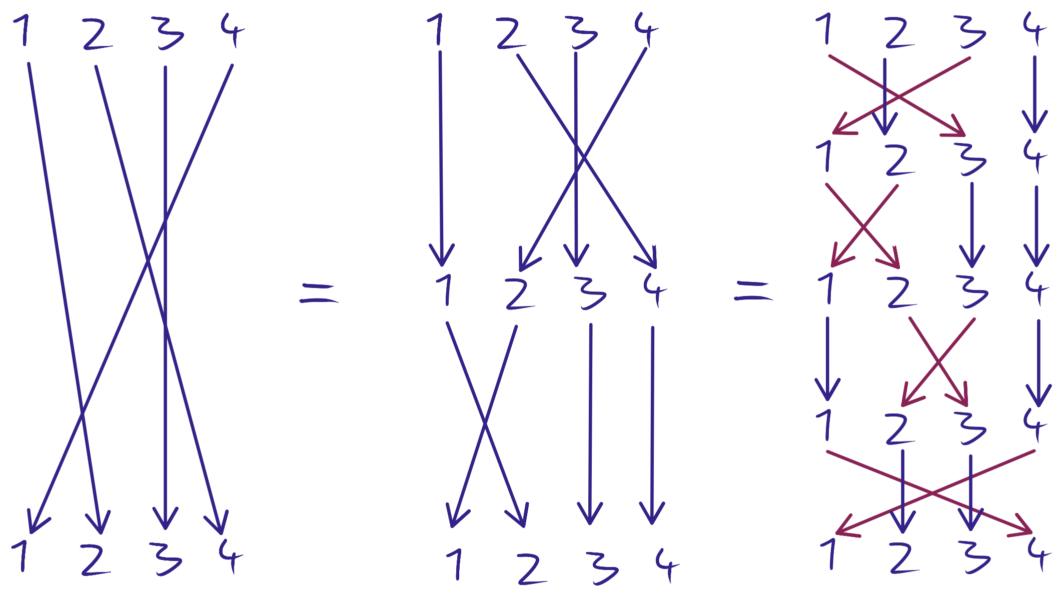
folgt also:

$$\boxed{\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^m}$$

Bsp: S_4

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2) \circ (2\ 4)$$

$$= (1\ 4) \circ (2\ 3) \circ (1\ 2) \circ (1\ 3)$$



$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^4 = 1$$

(c) mit Satz 2.30 & Zykelzerlegung

Ein Zykel der Länge l ist eine Permutation der Form

$$(a_1\ a_2\ \dots\ a_l) := \begin{cases} a_i \mapsto a_{i+1} & \text{für } i \in \{1,\dots,l-1\} \\ a_l \mapsto a_1 & \\ x \mapsto x & \text{für } x \in \{1,\dots,n\} \setminus \{a_1,\dots,a_l\} \end{cases}$$

Jede Permutation σ lässt sich zerlegen in eine Komposition disjunkter Zykel

$$\sigma = (a_1^{(1)} \dots a_{l_1}^{(1)}) \circ \dots \circ (a_1^{(m)} \dots a_{l_m}^{(m)})$$

mit

$$\{a_1^{(i)} \dots a_{l_i}^{(i)}\} \cap \{a_1^{(j)} \dots a_{l_j}^{(j)}\} = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

(sogar eindeutig bis auf Reihenfolge)

Für Zykel der Länge l ist

$$\operatorname{sgn}(a_1\ a_2\ \dots\ a_l) = (-1)^{l-1}$$

(denn

$$(a_1 \dots a_l) = (a_1\ a_2) \circ (a_1\ a_3) \circ \dots \circ (a_1\ a_l))$$

Also folgt für eine Zerlegung

$$\sigma = (a_1^{(1)} \circ\circ\circ a_{\ell_1}^{(1)}) \circ \text{--------} \circ (a_1^{(m)} \circ\circ\circ a_{\ell_m}^{(m)}):$$

$$\boxed{\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{(\ell_1-1)+\ldots+(\ell_m-1)}}$$

Bsp: S_9

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & 9 & 1 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 3\ 6) \circ (4\ 5\ 9\ 7)$$

$$= \underbrace{(4\ 5\ 9\ 7)}_{\ell_1 = 4} \circ \underbrace{(1\ 3\ 6)}_{\ell_2 = 3}$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^3 \cdot (-1)^2 = -1$$

2.31 Def: Die alternierende Gruppe ist der Kern

$$A_n := \ker(\mathrm{sgn}: S_n \longrightarrow \{\pm 1\})$$

Nach Korollar 2.24 ist $A_n \subseteq S_n$ eine normale Untergruppe.
Nach dem Isomorphiesatz 2.25 ist

$$S_n / A_n \cong \{\pm 1\}$$